

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВПО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой

МиКМ

\_\_\_\_ проф. А.В. Ковалев  
15.06.21.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Б1.О.18 Дифференциальная геометрия и топология

**1. Шифр и наименование направления подготовки / специальности:**

01.03.03 Механика и математическое моделирование

**2. Профиль подготовки:** Компьютерный инжиниринг в механике сплошных сред

**3. Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** Очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** Механики и компьютерного моделирования

**6. Составители программы:**

Минаева Надежда Витальевна, доктор физ-мат. наук, профессор, факультет ПММ, кафедра МиКМ, [nminaeva@yandex.ru](mailto:nminaeva@yandex.ru)

**7. Рекомендована:** НМС факультета ПММ протокол №10 от 16.06.2021.

**8. Учебный год:** 2020 - 2021

**Семестр(ы):** 3

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Целями освоения дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» являются: формирование математической культуры студента в области геометрии и топологии, изучение фундаментальных понятий геометрии, топологии и тензорного анализа, овладение классическим математическим аппаратом дифференциальной геометрии и топологии.

Задачи учебной дисциплины: научить студентов владеть теоретическим материалом, уметь формулировать и доказывать основные классические и современные результаты дисциплины, владеть навыками решения классических и современных задач и обоснования полученных результатов.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Дисциплина относится к обязательной части блока Б1.** Для успешного овладения данной дисциплиной студентам необходимы знания дисциплин: аналитическая геометрия, линейная алгебра, математический анализ (особенно разделы - дифференцирование функций одной и многих переменных, интегрирование). Освоение дисциплины позволит в дальнейшем изучать дисциплины: теоретическая и прикладная механика, мехатроника, сопротивление материалов.

## 11. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности	ОПК-1.1	Решает типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, сформулированных в рамках базовых дисциплин математики, информатики и естественных наук	Знать основные понятия и теоремы теории кривых, геометрию поверхностей, тензорный анализ, связность и ковариантное дифференцирование
		ОПК-1.2	Применяет системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач.	Уметь применять полученные знания при решении задач по дифференциальной геометрии, топологии и прикладных задач в изучаемых спецкурсах, при выполнении контрольных работ, курсовых и проектов, при научно-исследовательской работе по направлению
		ОПК-1.3	Осуществляет выбор современных математических инструментальных средств для обработки изучаемых данных в соответствии с поставленной задачей, анализирует результаты расчетов и обосновывает полученные результаты.	
				Владеть методами и методиками построения поверхностей, ковариантного дифференцирования, основами тензорного анализа

## 12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 3/108

Форма промежуточной аттестации(зачет/экзамен) зачет с оценкой

## 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Трудоемкость	
	Всего	По семестрам
		№ 3
Контактная работа	64	
В том числе: лекции	32	32

	практические	32	32
	лабораторные		
Самостоятельная работа		44	44
Промежуточная аттестация (для экзамена)			
Итого:		108	108

### 13.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
1. Лекции			
1.	Теория кривых	Геометрия кривых. Простая дуга. Определение кривых. Способы задания кривых. Кривизна плоской кривой. Эволюта. Пространственные кривые; сопровождающий трехгранник. Кривизна и кручение пространственной кривой	Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599</a>
2.	Геометрия поверхностей	Геометрия поверхностей. Гладкая поверхность. Способы задания поверхностей. Касательная плоскость, нормаль. Первая квадратичная форма. Площадь поверхности. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные направления и главные кривизны в точке поверхности. Формулы для нахождения главных кривизн, главных направлений, полной и средней кривизны поверхности, заданной параметрически. Формулы Эйлера, теорема Менье. Дифференциальные формулы, символы Кристоффеля. Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии на поверхности. Уравнение геодезической линии. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро	Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599</a>
3.	Тензорный анализ	Тензоры в линейном пространстве. Полилинейные функции. Законы преобразования вектора, коварианта, квадратичной формы, линейного оператора. Общее определение тензорного поля в области аффинного пространства. Алгебра тензоров. Линейные операции над тензорами. Тензорное умножение. Кососимметрические тензоры. Дифференциальные формы. Внешнее умножение форм. Внешнее дифференцирование форм. Свойства оператора внешнего дифференцирования.	Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599</a>
4.	Связность и ковариантное дифференцирование.	Определение связности. Ковариантная производная. Символы Кристоффеля, тензор кручения, симметричные связности. Симметричные римановы связности. Теорема существования и единственности симметричной римановой связности. Параллельный перенос. Уравнение параллельного переноса. Геодезические. Параллельный перенос в римановой связности. Перенос вдоль геодезической. Геодезические на сфере, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского. Тензор кривизны: два его определения. Алгебраические свойства тензора кривизны. Тензор Риччи, скалярная кривизна. Интегрирование дифференциальных форм. Формула Стокса и ее следствия.	Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599</a>

2. Практические занятия			
1.	Теория кривых	Геометрия кривых. Простая дуга. Определение кривых. Способы задания кривых. Кривизна плоской кривой. Эволюта. Пространственные кривые; сопровождающий трехгранник. Кривизна и кручение пространственной кривой	Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599</a>
2.	Геометрия поверхностей	Геометрия поверхностей. Гладкая поверхность. Способы задания поверхностей. Касательная плоскость, нормаль. Первая квадратичная форма. Площадь поверхности. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные направления и главные кривизны в точке поверхности. Формулы для нахождения главных кривизн, главных направлений, полной и средней кривизны поверхности, заданной параметрически. Формулы Эйлера, теорема Минье. Дифференциальные формулы, символы Кристоффеля. Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии на поверхности. Уравнение геодезической линии. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро	Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599</a>
3.	Тензорный анализ	Тензоры в линейном пространстве. Полилинейные функции. Законы преобразования вектора, ковектора, квадратичной формы, линейного оператора. Общее определение тензорного поля в области аффинного пространства. Алгебра тензоров. Линейные операции над тензорами. Тензорное умножение. Кососимметрические тензоры. Дифференциальные формы. Внешнее умножение форм. Внешнее дифференцирование форм. Свойства оператора внешнего дифференцирования.	Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599</a>
4.	Связность и ковариантное дифференцирование.	Определение связности. Ковариантная производная. Символы Кристоффеля, тензор кручения, симметричные связности. Симметричные римановы связности. Теорема существования и единственности симметричной римановой связности. Параллельный перенос. Уравнение параллельного переноса. Геодезические. Параллельный перенос в римановой связности. Перенос вдоль геодезической. Геодезические на сфере, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского. Тензор кривизны: два его определения. Алгебраические свойства тензора кривизны. Тензор Риччи, скалярная кривизна. Интегрирование дифференциальных форм. Формула Стокса и ее следствия.	Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599</a>

### 13.2 Разделы дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Теория кривых	8	8		11	27
2	Геометрия поверхностей	10	10		11	31
3	Тензорный анализ	8	8		11	27
4	Связность и ковариантное дифференцирование.	6	6		11	23
	Итого:	32	32		44	108

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: указание наиболее сложных разделов, работа с конспектами лекций, презентационным материалом, рекомен-

дации по выполнению курсовой работы, по организации самостоятельной работы по дисциплине и др)

Освоение дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» включает лекционные занятия, практические занятия и самостоятельную работу обучающихся.

На первом занятии студент получает информацию для доступа к комплексу учебно-методических материалов.

Лекционные занятия посвящены рассмотрению теоретических основ составляющих современные научные направления теории упругости, ключевых принципов, базовых понятий, стандартов и методологий.

Практические занятия предназначены для формирования умений и навыков, закрепленных компетенций по ОПОП. Они организуются в виде работы над практико-ориентированными заданиями, домашние задания, собеседования, выполнение реферата.

Самостоятельная работа студентов включает в себя проработку учебного материала лекций, разбор заданий, подготовку реферата.

Для успешного освоения дисциплины рекомендуется подробно конспектировать лекционный материал, просматривать основную и дополнительную литературу по соответствующей теме, чтобы систематизировать изучаемый материал.

Промежуточная аттестация. В течение семестра обучающимся предлагается выполнить практикоориентированные, домашние задания. Промежуточная аттестация проводится в форме собеседования на основе вопросов из п.20.2 .

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения следует выполнять все указания преподавателя по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1.	<a href="#">Паньженский, В. И.</a> Введение в дифференциальную геометрию [Электронный ресурс] / Паньженский В. И. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2015 .— 240 с. — Рекомендовано Государственным образовательным учреждением высшего профессионального образования «Московский педагогический государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика» .— Книга из коллекции Лань - Математика .— ISBN 978-5-8114-1979-1 .— <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67459">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67459</a> >
2	<a href="#">Веблен, Освальд</a> . Основания дифференциальной геометрии / О. Веблен, Дж. Уайтхед ; Пер. с англ. М.Г. Фрейдиной с доп. В.В. Вагнера .— М. : Гос. изд-во ин. лит., 1949 .— 229,[1] с. — <URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/books/bm5423.djvu">http://www.lib.vsu.ru/elib/books/bm5423.djvu</a> >.
3.	Дифференциальная геометрия : пособие по курсу "Дифференциальная геометрия" : специальность 010901 (010500) - Механика / Воронеж. гос. ун-т; сост. : А.В. Крутов, Ю.М. Мяснянкин .— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2004 .— 23 с. : ил. — Библиогр.: с.21 .— <URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/feb05029.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/feb05029.pdf</a> >.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
4.	<i>Лекции и лабораторные занятия по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т ; сост. Р.С. Адамова .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2008 .— Загл. с титул. экрана .— Для зарегистрированных читателей ВГУ .— Текстовый файл .— &lt;URL:<a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81.pdf</a>&gt; .—</i>

	<a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81-1.pdf">URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81-1.pdf</a> .— <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81-2.pdf">URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81-2.pdf</a>
5.	Топология и дифференциальная геометрия : Учеб. пособие: Для студ. 2 к. д/о / Воронеж. гос. ун-т. Каф. алгебры и тополог. методов анализа; Сост. Ю. Е. Гликлик .— 3-е изд. — Воронеж, 2002 .— 72 с. — 16.55 .— <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/jul07001.pdf">URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/jul07001.pdf</a> .
6.	<b>Монж, Гаспар.</b> Приложение анализа к геометрии / Г. Монж ; Пер. с фр. В.А. Гуковской; Под ред. с предисл. и примечаниями М.Я. Выгодского .— М. : Объедин. науч.-тех изд-во , 1936 .— 699 с. : ил .— (Классики естествознания) .— <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/books/b147974.djvu">URL: http://www.lib.vsu.ru/elib/books/b147974.djvu</a> .

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

№ п/п	Источник
1.	Электронно-библиотечная система «Консультант студента». - Режим доступа: <a href="https://www.studentlibrary.ru/">https://www.studentlibrary.ru/</a>
2	Электронно-библиотечная система «Лань» (доступ осуществляется по адресу: <a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a> )
3	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – Режим доступа: <a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a> .
4	Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599</a>

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы** (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

Самостоятельная работа обучающегося должна включать подготовку к практическим занятиям, контрольной работе и подготовку к промежуточной аттестации.

Для обеспечения самостоятельной работы студентов в электронном курсе дисциплины на образовательном портале «Электронный университет ВГУ» сформирован учебно-методический комплекс, который включает в себя: программу курса, учебные пособия и справочные материалы, методические указания по выполнению заданий. Студенты получают доступ к данным материалам на первом занятии по дисциплине. Указанные в учебно-методическом комплексе учебные пособия и справочные материалы, приведены в таблице ниже:

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале. Применяются разные типы лекций (вводная, обзорная, информационная, проблемная).

Информационные технологии для реализации учебной дисциплины:

- технологии синхронного и асинхронного взаимодействия студентов и преподавателя посредством служб (сервисов) по пересылке и получению электронных сообщений, в том числе, по сети Интернет а также другие Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.;

- сервис электронной почты для оперативной связи преподавателя и студентов.

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, для организации самостоятельной работы обучающихся используется онлайн-курс, размещенный на платформе Электронного уни-

верситета ВГУ (LMS moodle), а также другие Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:** Лекционная аудитория должна быть оборудована учебной мебелью, компьютером, мультимедийным оборудованием (проектор, экран, средства звуковоспроизведения), допускается переносное оборудование. Практические занятия должны проводиться в специализированной аудитории, оснащенной учебной мебелью и персональными компьютерами с доступом в сеть Интернет (компьютерные классы, студии), мультимедийным оборудованием (мультимедийный проектор, экран, средства звуковоспроизведения), Число рабочих мест в аудитории должно быть таким, чтобы обеспечивалась индивидуальная работа студента на отдельном персональном компьютере.

Для самостоятельной работы необходимы компьютерные классы, помещения, оснащенные компьютерами с доступом к сети Интернет.

Программное обеспечение: ОС Windows 8 (10), интернет-браузер (Chrome, Яндекс.Браузер, Mozilla Firefox), ПО Adobe Reader, пакет стандартных офисных приложений для работы с документами, таблицами (MS Office, МойОфис, LibreOffice).

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Теория кривых	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2	<i>Собеседование Практикоориентированные задания/домашние задания Контрольная работа</i>
2.	Геометрия поверхностей	ОПК-1	ОПК-1.1, ОПК-1.2	<i>Собеседование Практикоориентированные задания/домашние задания Контрольная работа</i>
3	Тензорный анализ	ОПК-1	ОПК-1.3	<i>Собеседование</i>
4	Связность и ковариантное дифференцирование.	ОПК-1	ОПК-1.3	<i>Практикоориентированные задания/домашние задания</i>
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет с оценкой				<i>Перечень вопросов</i>

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

*Практикоориентированные задания/домашние задания*

---

*(наименование оценочного средства текущего контроля успеваемости)*

Перечень заданий из задачников и пособий из п.16

Проводится путем проверки выполненных упражнений

Оценка	Критерии оценок
Отлично	Правильное решение задачи. Получены основные характеристики объектов
Хорошо	<i>Правильное решение задачи. Получены основные характеристики объектов, но есть некоторые ошибки.</i>
Удовлетворительно	<i>Неправильное решение задачи, но верно выбран метод решения.</i>
Неудовлетворительно	<i>Неправильное решение задачи, причем неверно выбран метод решения.</i>

### Контрольная работа

Примеры вариантов:

Контрольно-измерительный материал № 1

1

1. Найти длину дуги гиперболической винтовой линии, заключенную между точками 0 и  $t$ .
2. Параметризовать при помощи естественного параметра.

Контрольно-измерительный материал № 1

1. Найти сопровождающий трехгранник для винтовой линии в точке  $(a, 0, 0)$ .
2. Вычислить кривизну

*Проводится путем проверки выполненных упражнений*

Оценка	Критерии оценок
Отлично	Правильное решение задачи. Получены основные характеристики объектов
Хорошо	<i>Правильное решение задачи. Получены основные характеристики объектов, но есть некоторые ошибки.</i>
Удовлетворительно	<i>Неправильное решение задачи, но верно выбран метод решения.</i>
Неудовлетворительно	<i>Неправильное решение задачи, причем неверно выбран метод решения.</i>

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Собеседование по вопросам

*(наименование оценочного средства промежуточной аттестации)*

*Вопросы к зачету*

1. Основные системы координат.
2. Вектор-функция
3. Способы задания кривой.
4. Сопровождающий трехгранник (плоскости, оси)
5. Длина дуги.
6. Естественная параметризация
7. Понятие кривизны,
8. теорема о кривизне.



9. Соприкасающаяся окружность.

10. Понятие кручения

11. теорема о кручении.

Зачет проводится на основе КИМ, составленных на основе вопросов для подготовки к зачету.

Оценка	Критерии оценок
Отлично	Знание основных соотношений Теория кривых, Геометрия поверхностей, Тензорный анализ, Связность и ковариантное дифференцирование. Владение основными методами решения задач. Умение получить основные характеристики объектов.
Хорошо	Знание основных соотношений Теория кривых, Геометрия поверхностей, Тензорный анализ, Связность и ковариантное дифференцирование, но возможны некоторые неточности при ответе. Владение основными методами решения задач. Умение получить основные характеристики объектов.
Удовлетворительно	Знание основных соотношений Теория кривых, Геометрия поверхностей, Тензорный анализ, Связность и ковариантное дифференцирование. Умение получить основные характеристики объектов.
Неудовлетворительно	Нетвёрдое знание основных соотношений Теория кривых, Геометрия поверхностей, Тензорный анализ, Связность и ковариантное дифференцирование. Плохое владение методами решения задач.