

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВПО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
МиКМ  
проф. А.В. Ковалев  
15.06.21.



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Б1.О.18 Дифференциальная геометрия и топология

**1. Шифр и наименование направления подготовки / специальности:**  
01.03.03 Механика и математическое моделирование

**2. Профиль подготовки:** Компьютерный инжиниринг в механике сплошных сред

**3. Квалификация (степень) выпускника:** бакалавр

**4. Форма обучения:** Очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** Механики и компьютерного моделирования

**6. Составители программы:**

Минаева Надежда Витальевна, доктор физ-мат. наук, профессор, факультет ПММ,  
кафедра МиКМ, [nminaeva@yandex.ru](mailto:nminaeva@yandex.ru)

**7. Рекомендована:** НМС факультета ПММ протокол №10 от 16.06.2021.

**8. Учебный год:** 2020 - 2021

**Семестр(ы):** 3

## **9. Цели и задачи учебной дисциплины:**

Целями освоения дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» являются: формирование математической культуры студента в области геометрии и топологии, изучение фундаментальных понятий геометрии, топологии и тензорного анализа, овладение классическим математическим аппаратом дифференциальной геометрии и топологии.

Задачи учебной дисциплины: научить студентов владеть теоретическим материалом, уметь формулировать и доказывать основные классические и современные результаты дисциплины, владеть навыками решения классических и современных задач и обоснования полученных результатов.

**10. Место учебной дисциплины в структуре ООП: Дисциплина относится к обязательная части блока Б1.** Для успешного овладения данной дисциплиной студентам необходимы знания дисциплин: аналитическая геометрия, линейная алгебра, математический анализ (особенно разделы - дифференцирование функций одной и многих переменных, интегрирование). Освоение дисциплины позволит в дальнейшем изучать дисциплины: теоретическая и прикладная механика, мехатроника, со- противление материалов.

## **11. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины:**

| Код   | Название компетенции   | Код(ы)  | Индикатор(ы)   | Планируемые результаты обучения   |
|-------|--|---------|--|---|
| ОПК-1 | Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности | ОПК-1.1 | Решает типовые задачи с учетом основных понятий и общих закономерностей, сформулированных в рамках базовых дисциплин математики, информатики и естественных наук   | Знать основные понятия и теоремы теории кривых, геометрию поверхностей, тензорный анализ, связность и ковариантное дифференцирование  |
|       |  | ОПК-1.2 | Применяет системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач.  | Уметь применять полученные знания при решении задач по дифференциальной геометрии, топологии и прикладных задач в изучаемых спецкурсах, при выполнении контрольных работ, курсовых и проектов, научно-исследовательской работе по направлению |
|       |  | ОПК-1.3 | Осуществляет выбор современных математических инструментальных средств для обработки изучаемых данных в соответствии с поставленной задачей, анализирует результаты расчетов и обосновывает полученные результаты. | Владеть методами и методиками построения поверхностей, ковариантного дифференцирования, основами тензорного анализа   |

## **12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 3/108**

Форма промежуточной аттестации(зачет/экзамен) зачет с оценкой

## **13. Трудоемкость по видам учебной работы**

| Вид учебной работы  | Трудоемкость |              |
|---------------------|--------------|--------------|
|                     | Всего        | По семестрам |
|                     |              | № 3          |
| Контактная работа   | 64           |              |
| В том числе: лекции | 32           | 32           |

|   |              |     |     |
|---|--------------|-----|-----|
|   | практические | 32  | 32  |
|   | лабораторные |     |     |
| Самостоятельная работа                  |              | 44  | 44  |
| Промежуточная аттестация (для экзамена) |              |     |     |
| Итого:                                  |              | 108 | 108 |

### 13.1. Содержание разделов дисциплины

| № п/п     | Наименование раздела дисциплины             | Содержание раздела дисциплины   | Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК  |
|-----------|---|---|---|
| 1. Лекции |   |   |   |
| 1.        | Теория кривых                               | Геометрия кривых. Простая дуга. Определение кривых. Способы задания кривых. Кривизна плоской кривой. Эволюта. Пространственные кривые; сопровождающий трехгранник. Кривизна и кручение пространственной кривой  | Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599</a> |
| 2.        | Геометрия поверхностей                      | Геометрия поверхностей. Гладкая поверхность. Способы задания поверхностей Касательная плоскость, нормаль. Первая квадратичная форма. Площадь поверхности. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные направления и главные кривизны в точке поверхности. Формулы для нахождения главных кривизн, главных направлений, полной и средней кривизны поверхности, заданной параметрически. Формулы Эйлера, теорема Менье. Деривационные формулы, символы Кристоффеля. Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии на поверхности. Уравнение геодезической линии. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро | Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599</a> |
| 3.        | Тензорный анализ                            | Тензоры в линейном пространстве. Полилинейные функции. Законы преобразования вектора, ковектора, квадратичной формы, линейного оператора. Общее определение тензорного поля в области аффинного пространства. Алгебра тензоров. Линейные операции над тензорами. Тензорное умножение. Ко-сосимметрические тензоры. Дифференциальные формы. Внешнее умножение форм. Внешнее дифференцирование форм. Свойства оператора внешнего дифференцирования.   | Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599</a> |
| 4.        | Связность и ковариантное дифференцирование. | Определение связности. Ковариантная производная. Символы Кристоффеля, тензор кручения, симметричные связности. Симметричные римановы связности. Теорема существования и единственности симметричной римановой связности. Параллельный перенос. Уравнение параллельного переноса. Геодезические. Параллельный перенос в римановой связности. Перенос вдоль геодезической. Геодезические на сфере, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского. Тензор кривизны: два его определения. Алгебраические свойства тензора кривизны. Тензор Риччи, скалярная кривизна. Интегрирование дифференциальных форм. Формула Стокса и ее следствия.                                  | Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599</a> |

| 2. Практические занятия |   |  |  |  |
|-------------------------|---|--|--|--|
| 1.                      | Теория кривых                               | Геометрия кривых. Простая дуга. Определение кривых. Способы задания кривых. Кривизна плоской кривой. Эволюта. Пространственные кривые; сопровождающий трехгранник. Кривизна и кручение пространственной кривой   | Дифгеометрия,<br><a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599</a> |  |
| 2.                      | Геометрия поверхностей                      | Геометрия поверхностей. Гладкая поверхность. Способы задания поверхностей. Касательная плоскость, нормаль. Первая квадратичная форма. Площадь поверхности. Нормальная кривизна кривой на поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Главные направления и главные кривизны в точке поверхности. Формулы для нахождения главных кривизн, главных направлений, полной и средней кривизны поверхности, заданной параметрически. Формулы Эйлера, теорема Менье. Деривационные формулы, символы Кристоффеля. Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии на поверхности. Уравнение геодезической линии. Геодезические на поверхностях вращения. Теорема Клеро | Дифгеометрия,<br><a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599</a> |  |
| 3.                      | Тензорный анализ                            | Тензоры в линейном пространстве. Полилинейные функции. Законы преобразования вектора, ковектора, квадратичной формы, линейного оператора. Общее определение тензорного поля в области аффинного пространства. Алгебра тензоров. Линейные операции над тензорами. Тензорное умножение. Коносимметрические тензоры. Дифференциальные формы. Внешнее умножение форм. Внешнее дифференцирование форм. Свойства оператора внешнего дифференцирования.   | Дифгеометрия,<br><a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599</a> |  |
| 4.                      | Связность и ковариантное дифференцирование. | Определение связности. Ковариантная производная. Символы Кристоффеля, тензор кручения, симметричные связности. Симметричные римановы связности. Теорема существования и единственности симметричной римановой связности. Параллельный перенос. Уравнение параллельного переноса. Геодезические. Параллельный перенос в римановой связности. Перенос вдоль геодезической. Геодезические на сфере, евклидовой плоскости и плоскости Лобачевского. Тензор кривизны: два его определения. Алгебраические свойства тензора кривизны. Тензор Риччи, скалярная кривизна. Интегрирование дифференциальных форм. Формула Стокса и ее следствия.                                   | Дифгеометрия,<br><a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=1599</a> |  |

### 13.2 Разделы дисциплины и виды занятий

| № п/п | Наименование раздела дисциплины             | Виды занятий (часов) |              |              |                        |       |
|-------|---|----------------------|--------------|--------------|------------------------|-------|
|       |   | Лекции               | Практические | Лабораторные | Самостоятельная работа | Всего |
| 1     | Теория кривых                               | 8                    | 8            |              | 11                     | 27    |
| 2     | Геометрия поверхностей                      | 10                   | 10           |              | 11                     | 31    |
| 3     | Тензорный анализ                            | 8                    | 8            |              | 11                     | 27    |
| 4     | Связность и ковариантное дифференцирование. | 6                    | 6            |              | 11                     | 23    |
|       | Итого:                                      | 32                   | 32           |              | 44                     | 108   |

**14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**  
**(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: указание наиболее сложных разделов, работа с конспектами лекций, презентационным материалом, рекомен-**

*дации по выполнению курсовой работы, по организации самостоятельной работы по дисциплине и др)*

Освоение дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» включает лекционные занятия, практические занятия и самостоятельную работу обучающихся.

На первом занятии студент получает информацию для доступа к комплексу учебно-методических материалов.

Лекционные занятия посвящены рассмотрению теоретических основ составляющих современные научные направления теории упругости, ключевых принципов, базовых понятий, стандартов и методологий.

Практические занятия предназначены для формирования умений и навыков, закрепленных компетенций по ОПОП. Они организовываются в виде работы над практико-ориентированными заданиями, домашние задания, собеседования, выполнение реферата.

Самостоятельная работа студентов включает в себя проработку учебного материала лекций, разбор заданий, подготовку реферата.

Для успешного освоения дисциплины рекомендуется подробно конспектировать лекционный материал, просматривать основную и дополнительную литературу по соответствующей теме, чтобы систематизировать изучаемый материал.

Промежуточная аттестация. В течение семестра обучающимся предлагается выполнить практикоориентированные, домашние задания. Промежуточная аттестация проводится в форме собеседования на основе вопросов из п.20.2 .

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения следует выполнять все указания преподавателя по работе на LMS-платформе, своевременно подключаться к online-занятиям, соблюдать рекомендации по организации самостоятельной работы.

## **15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины**

**а) основная литература:**

| №<br>п/п | Источник   |
|----------|--|
| 1.       | <u><a href="#">Паньженский, В. И.</a></u> Введение в дифференциальную геометрию [Электронный ресурс] / Паньженский В. И. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2015 .— 240 с. — Рекомендовано Государственным образовательным учреждением высшего профессионального образования «Московский педагогический государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Математика» .— Книга из коллекции Лань - Математика .— ISBN 978-5-8114-1979-1 .— <URL: <a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67459">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=67459</a> > |
| 2        | <u><a href="#">Веблен, Освальд</a></u> . Основания дифференциальной геометрии / О. Веблен, Дж. Уайтхед ; Пер. с англ. М.Г. Фрейдиной с доп. В.В. Вагнера .— М. : Гос. изд-во ин. лит., 1949 .— 229,[1] с. — <URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/books/bm5423.djvu">http://www.lib.vsu.ru/elib/books/bm5423.djvu</a> >.   |
| 3.       | Дифференциальная геометрия : пособие по курсу "Дифференциальная геометрия" : специальность 010901 (010500) - Механика / Воронеж. гос. ун-т; сост. : А.В. Крутов, Ю.М. Мяснякин .— Воронеж : ЛОП ВГУ, 2004 .— 23 с. : ил .— Библиог.: с.21 .— <URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/feb05029.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/feb05029.pdf</a> >.  |

**б) дополнительная литература:**

| №<br>п/п | Источник  |
|----------|---|
| 4.       | Лекции и лабораторные занятия по дифференциальной геометрии [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т ; сост. Р.С. Адамова .— Электрон. текстовые дан. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2008 .— Загл. с титул. экрана .— Для зарегистрированных читателей ВГУ .— Текстовый файл .— <URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81.pdf</a> > .— |

|    |   |
|----|---|
|    | <URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81-1.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81-1.pdf</a> > .—<br><URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81-2.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/m09-81-2.pdf</a> >   |
| 5. | Топология и дифференциальная геометрия : Учеб. пособие: Для студ. 2 к. д/о / Воронеж. гос. ун-т. Каф. алгебры и тополог. методов анализа; Сост. Ю. Е. Гликлих .— 3-е изд. — Воронеж, 2002 .— 72 с. — 16.55 .—<br><URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/jul07001.pdf">http://www.lib.vsu.ru/elib/texts/method/vsu/jul07001.pdf</a> >.   |
| 6. | <b>Монж, Гаспар.</b> Приложение анализа к геометрии / Г. Монж ; Пер. с фр. В.А. Гуковской; Под ред. с предисл. и примечаниями М.Я. Выгодского .— М. : Объедин. науч.-тех изд-во , 1936 .— 699 с. : ил .— (Классики естествознания) .—<br><URL: <a href="http://www.lib.vsu.ru/elib/books/b147974.djvu">http://www.lib.vsu.ru/elib/books/b147974.djvu</a> >. |

в) информационные электронно-образовательные ресурсы:

| № п/п | Источник  |
|-------|---|
| 1.    | Электронно-библиотечная система «Консультант студента». - Режим доступа: <a href="https://www.studentlibrary.ru/">https://www.studentlibrary.ru/</a>            |
| 2     | Электронно-библиотечная система «Лань» (доступ осуществляется по адресу: <a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a> )                          |
| 3     | Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – Режим доступа: <a href="http://www.lib.vsu.ru">http://www.lib.vsu.ru</a> . |
| 4     | Дифгеометрия, <a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11599</a>   |

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы (учебно-методические рекомендации, пособия, задачники, методические указания по выполнению практических (контрольных), курсовых работ и др.)

Самостоятельная работа обучающегося должна включать подготовку к практическим занятиям, контрольной работе и подготовку к промежуточной аттестации.

Для обеспечения самостоятельной работы студентов в электронном курсе дисциплины на образовательном портале «Электронный университет ВГУ» сформирован учебно-методический комплекс, который включает в себя: программу курса, учебные пособия и справочные материалы, методические указания по выполнению заданий. Студенты получают доступ к данным материалам на первом занятии по дисциплине. Указанные в учебно-методическом комплексе учебные пособия и справочные материалы, приведены в таблице ниже:

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале. Применяются разные типы лекций (вводная, обзорная, информационная, проблемная).

Информационные технологии для реализации учебной дисциплины:

- технологии синхронного и асинхронного взаимодействия студентов и преподавателя посредством служб (сервисов) по пересылке и получению электронных сообщений, в том числе, по сети Интернет а также другие Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.;
- сервис электронной почты для оперативной связи преподавателя и студентов.

Дисциплина реализуется с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, для организации самостоятельной работы обучающихся используется онлайн-курс, размещенный на платформе Электронного уни-

верситета ВГУ (LMS moodle), а также другие Интернет-ресурсы, приведенные в п.15в.

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:** Лекционная аудитория должна быть оборудована учебной мебелью, компьютером, мультимедийным оборудованием (проектор, экран, средства звукоспроизведения), допускается переносное оборудование. Практические занятия должны проводиться в специализированной аудитории, оснащенной учебной мебелью и персональными компьютерами с доступом в сеть Интернет (компьютерные классы, студии), мультимедийным оборудованием (мультимедийный проектор, экран, средства звукоспроизведения). Число рабочих мест в аудитории должно быть таким, чтобы обеспечивалась индивидуальная работа студента на отдельном персональном компьютере.

Для самостоятельной работы необходимы компьютерные классы, помещения, оснащенные компьютерами с доступом к сети Интернет.

Программное обеспечение: ОС Windows 8 (10), интернет-браузер (Chrome, Яндекс.Браузер, Mozilla Firefox), ПО Adobe Reader, пакет стандартных офисных приложений для работы с документами, таблицами (MS Office, МойОфис, LibreOffice).

## **19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

| № п/п  | Наименование раздела дисциплины (модуля)    | Компетенция(и) | Индикатор(ы) достижения компетенции | Оценочные средства  |
|--|---|----------------|-------------------------------------|---|
| 1.   | Теория кривых                               | ОПК-1          | ОПК-1.1<br>ОПК-1.2                  | Собеседование<br>Практикоориентированные задания/домашние задания<br>Контрольная работа |
| 2.   | Геометрия поверхностей                      | ОПК-1          | ОПК-1.1,<br>ОПК-1.2                 | Собеседование<br>Практикоориентированные задания/домашние задания<br>Контрольная работа |
| 3  | Тензорный анализ                            | ОПК-1          | ОПК-1.3                             | Собеседование   |
| 4  | Связность и ковариантное дифференцирование. | ОПК-1          | ОПК-1.3                             | Практикоориентированные задания/домашние задания  |
| Промежуточная аттестация<br>форма контроля – зачет с оценкой |   |                |                                     | Перечень вопросов   |

## **20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания**

### **20.1 Текущий контроль успеваемости**

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Практикоориентированные задания/домашние задания

(наименование оценочного средства текущего контроля успеваемости)

Перечень заданий из задачников и пособий из п.16

Проводится путем проверки выполненных упражнений

| Оценка              | Критерии оценок   |
|---------------------|---|
| Отлично             | Правильное решение задачи. Получены основные характеристики объектов                            |
| Хорошо              | Правильное решение задачи. Получены основные характеристики объектов, но есть некоторые ошибки. |
| Удовлетворительно   | Неправильное решение задачи, но верно выбран метод решения.                                     |
| Неудовлетворительно | Неправильное решение задачи, причем неверно выбран метод решения.                               |

### Контрольная работа

Примеры вариантов:

#### Контрольно-измерительный материал № 1

1

1. Найти длину дуги гиперболической винтовой линии, заключенную между точками 0 и t.
2. Параметризовать при помощи естественного параметра.

#### Контрольно-измерительный материал № 1

1. Найти сопровождающий трехгранник для винтовой линии в точке (a,0,0).
2. Вычислить кривизну

**Проводится путем проверки выполненных упражнений**

| Оценка              | Критерии оценок   |
|---------------------|---|
| Отлично             | Правильное решение задачи. Получены основные характеристики объектов                            |
| Хорошо              | Правильное решение задачи. Получены основные характеристики объектов, но есть некоторые ошибки. |
| Удовлетворительно   | Неправильное решение задачи, но верно выбран метод решения.                                     |
| Неудовлетворительно | Неправильное решение задачи, причем неверно выбран метод решения.                               |

## 20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

### Собеседование по вопросам

(наименование оценочного средства промежуточной аттестации)

### Вопросы к зачету

1. Основные системы координат.
2. Вектор-функция
3. Способы задания кривой.
4. Сопровождающий трехгранник (плоскости, оси)
5. Длина дуги.
6. Естественная параметризация
7. Понятие кривизны,
8. теорема о кривизне.

9. Соприкасающаяся окружность.

10. Понятие кручения

11. теорема о кручении.

Зачет проводится на основе КИМ, составленных на основе вопросов для подготовки к зачету.

| Оценка              | Критерии оценок  |
|---------------------|--|
| Отлично             | Знание основных соотношений Теория кривых, Геометрия поверхностей, Тензорный анализ, Связность и ковариантное дифференцирование. Владение основными методами решения задач. Умение получить основные характеристики объектов.  |
| Хорошо              | Знание основных соотношений Теория кривых, Геометрия поверхностей, Тензорный анализ, Связность и ковариантное дифференцирование, но возможны некоторые неточности при ответе. Владение основными методами решения задач. Умение получить основные характеристики объектов. |
| Удовлетворительно   | Знание основных соотношений Теория кривых, Геометрия поверхностей, Тензорный анализ, Связность и ковариантное дифференцирование. Умение получить основные характеристики объектов.   |
| Неудовлетворительно | Нетвёрдое знание основных соотношений Теория кривых, Геометрия поверхностей, Тензорный анализ, Связность и ковариантное дифференцирование. Плохое владение методами решения задач.   |